Programme de colle n°28

semaine du 25 au 29 mai

Notions vues en cours

Chapitre 35 : Dénombrement

- Ensemble fini ou infini ; cardinal d'un ensemble ; si E est fini, son cardinal est noté $\mathrm{card}(E)$ ou $|E|$.
- On note $E \simeq F$ pour signifier que deux ensembles sont en bijections ; c'est une relation d'équivalence ; si E est fini et $E \simeq F$, alors F est fini et $\mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(E)$.
- Cardinal d'un sous-ensemble avec cas d'égalité ; cardinal de $A \cup B$, de $\overline{A}$, de $B \setminus A$; cardinal de $E \times F$; de F^E ; de $\mathscr{P}(E)$.
- p-**uplet** d'un ensemble ; nombre de p-uplets d'un ensemble fini ; **arrangement à** p **éléments** d'un ensemble ; nombre d'arrangements à p éléments pour un ensemble à n éléments ; cardinal de S_n.
- **Combinaison à** p **éléments** d'un ensemble ; il y a $\binom{n}{p}$ de combinaisons à p éléments pour un ensemble à n éléments.
- Différentes techniques et astuces de dénombrement : principes multiplicatifs et additifs, passage au complémentaire, classification, etc.
- Pour $f : E \to F$; le cardinal de $f(E)$ est inférieur à celui de E ; cas d'égalité ; si $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$, il y a équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité de f.

Chapitre 36 : Univers et probabilités

- Vocabulaire probabiliste : **univers** Ω (supposé fini en MPSI) ; événement ; événement élémentaire ; issue (ou résultat) d'une expérience aléatoire ; événements incompatibles (i.e. disjoints)
- **Probabilité** sur un univers (notée généralement $\mathbb{P}$) ; on dit que $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé
- Une probabilité $\mathbb{P}$ est entièrement déterminée par les valeurs $\mathbb{P}(\{\omega\})$ avec $\omega \in \Omega$; propriété $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$
- Densité de probabilités $(z_\omega)_{\omega \in \Omega}$; il existe une et une seule probabilité $\mathbb{P}$ vérifiant $\mathbb{P}(\{\omega\}) = z_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$; Probabilité uniforme sur Ω définie par $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\mathrm{card}(\Omega)}$ et formule pour $\mathbb{P}(A)$
- Propriétés et formules classiques des probabilités : $\mathbb{P}(\varnothing)$, $\mathbb{P}(\overline{A})$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, etc.
- **Probabilité conditionnelle de** A **sachant** B, notée $\mathbb{P}(A \mid B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$; l'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur Ω
- **Formule des probabilités composées** (avec 2 ou n événements) avec la convention $\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = 0$ si $\mathbb{P}(B) = 0$.
- Système complet d'évènements (abrégé S.C.E.), **formule des probabilités totales**
- **Formule de Bayes**
- **Événements indépendants** ; caractérisation $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$; A et B sont indépendants ssi A et $\overline{B}$ le sont.
- Événements indépendants deux à deux ; événements (mutuellement) indépendants ; si $A_1, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux.

Attention ! *La notion de variable aléatoire n'est pas au programme cette semaine.*

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Questions Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **33 à 36**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont exigibles.* ***Les énoncés des définitions et théorèmes doivent être clairement... énoncés !***

1. Définition d'une probabilité sur Ω puis donner et démontrer 5 propriétés qui se déduisent de la définition Chapitre 36, Définition 36.4 et Théorème 36.8

2. Définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B. Sans démonstration : formule des probabilités composées. Définition d'un système complet d'évènement. Avec démonstration : formule des probabilités totales Chapitre 36, Définition 36.9, Théorème 36.13, Définition 36.14 et Théorème 36.15

3. Formule de Bayes (avec démonstration en supposant connue la formule des probabilités totales), puis résoudre l'exercice suivant (les valeurs numériques pourront être changées par l'examinateur) :

   > Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille. On dispose d'un test pour détecter cette maladie. Si la personne est malade, le test détectera la maladie dans 99% des cas. Si la personne n'est pas malade, le test sera positif dans 0,1% des cas. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif.

   Chapitre 36, Théorème 36.16, Exemple 15 juste après

Questions Flash au programme :

Chapitre 36 :

- Que signife "A est un évènement de Ω" ? Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, quels sont ses ensembles de départ et d'arrivée ?
- Qu'appelle-t-on une distribution de probabilités sur un univers Ω ?
- Que doivent vérifier A et B pour que $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$? Que devient cette formule dans le cas général ?
- À quelle condition est-ce que $\mathbb{P}(A \mid B)$ a un sens ? Que vaut $\mathbb{P}(A \mid B)$ par définition ?
- Énoncer la formule des probabilités composées
- Énoncer la formule des probabilités totales
- Énoncer la formule de Bayes
- Que signifie "A et B sont indépendants" ? et "$A_1,\cdots,A_n$ sont mutuellement indépendants" ?

Chapitre 35 : (les notations sont sous-entendues)

- Donner les formules pour $\operatorname{card}(E\times F)$, de $\operatorname{card}(F^E)$ et de $\operatorname{card}(\mathscr{P}(E))$.
- Soit $A,B\in\mathscr{P}(E)$. Donner la formule pour $\operatorname{card}(A\cup B)$.
- Si $\operatorname{card}(E)=n$, combien y a-t-il de p-uplets de E ?
- Si $\operatorname{card}(E)=n$, combien y a-t-il d'arrangements à p éléments de E ?
- Si $\operatorname{card}(E)=n$, combien y a-t-il de combinaisons à p éléments de E ?
- Soit $f:E\to F$ avec $\operatorname{card}(E)=\operatorname{card}(F)$. Que peut-on en déduire sur f en termes d'injectivité, de surjectivité, de bijectivité ?

Chapitre 34 :

- Compléter : "Une fonction $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{K}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma=(x_i)_{0\le i\le n}$ de $\left[a,b\right]$ telle que ..."

- Compléter : "Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a,b]$ telle que ..."
- Sous quelles conditions sur α, β et f est-ce que la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ est dérivable ? Donner l'expression de $\varphi'(x)$.
- Énoncer le théorème de convergence des sommes de Riemann.
- Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
- Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Rappeler la définition d'une fonction uniformément continue en termes de quantificateurs.
- Compléter :

$$f \quad \ldots\ldots \quad \Longrightarrow \quad f \text{ uniformément continue} \quad \Longrightarrow \quad f \quad \ldots\ldots$$

- Énoncer le théorème de *Heine*.

Chapitre 33 : (les notations sont sous-entendues)

- Soit $f : E \times E \to F$. Que signifie "f est bilinéaire" ?
- Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. Que signifie l'assertion "f est antisymétrique" ?
- Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. Que signifie l'assertion "f est alternée" ?
- Compléter la formule suivante : $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \ldots\ldots$
- Développer le déterminant suivant selon la seconde ligne : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. On écrira bien chaque terme du développement sans simplification supplémentaire, et on ne demande pas de terminer le calcul.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Compléter la formule : $\det f = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (on attend une expression qui dépend de $\mathcal{B}$).
- Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Existe-t-il des formules pour le déterminant de $A+B$, de λA et de AB ? Si oui, les donner.
- Si deux matrices sont semblables, que peut-on dire de leur déterminant ? Est-ce une équivalence ?
- Soit $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. Donner l'expression de $[\mathrm{Com}(A)]_{ij}$ avec i et j des entiers choisis par l'examinateur.
- Donner la formule qui fait intervenir une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et sa comatrice $\mathrm{Com}(A)$.
- Soit $AX = B$ un système linéaire. À quelle condition ce système est-il appelé un système de Cramer ?